

ОТЗЫВ

отечественного научного консультанта д.ф.-м.н., профессора Умирбаева У.У.

на диссертационную работу Алимбаева Алибека Алпысбаевича
на тему "Автоморфизмы свободных неассоциативных алгебр над евклидовыми
кольцами", представленную на соискание ученой степени доктора философии
(PhD) по специальности «6D060100–Математика»

Исследование структуры групп автоморфизмов алгебр, особенно свободных алгебр конечного ранга является одним из центральных направлений современной алгебры. Еще в 1915-24 гг. в серии работ Нильсен доказал, что все автоморфизмы свободных групп конечного ранга являются ручными. Классическая теорема Юнга (1942 г.)-ван дер Калка (1953 г.) утверждает, что автоморфизмы алгебры многочленов от двух переменных являются ручными. Более того, группа автоморфизмов $\text{Aut}(K[x,y])$ алгебры многочленов $K[x,y]$ от двух переменных над полем K допускает структуру амальгамированного свободного произведения, т.е.

$$\text{Aut}(K[x,y]) = A *_{\mathcal{C}} B,$$

где A – подгруппа аффинных автоморфизмов, B – подгруппа треугольных автоморфизмов и $\mathcal{C} = A \cap B$. Этот результат дает исчерпывающие описания групп автоморфизмов двупорожденных алгебр многочленов от двух переменных и применяется для решения многих задач об автоморфизмах этих алгебр.

В 1970-72 гг. Л. Макар-Лиманов и А. Черняевич доказали, что автоморфизмы свободных ассоциативных алгебр ранга два также являются ручными. Более того, они показали, что группы автоморфизмов свободных ассоциативных алгебр и алгебр многочленов ранга два изоморфны. Точные аналоги этих результатов доказаны Л. Макар-Лимановым, У. Турусбековой и У. Умирбаевым для свободных алгебр Пуассона над полем нулевой характеристики. Следовательно, группы автоморфизмов свободных ассоциативных алгебр и свободных алгебр Пуассона ранга два также допускают структуру амальгамированного свободного произведения. В 2008 году Д. Козыбаев, Л. Макар-Лиманов и У. Умирбаев доказали, что автоморфизмы двупорожденных свободных правосимметричных алгебр также являются ручными.

Оказалось, что автоморфизмы алгебры многочленов и свободных ассоциативных алгебр от трех переменных устроены гораздо сложнее. В 2001 году У. Умирбаев и И. Шестаков доказали, что автоморфизм Нагаты алгебры многочленов от трех переменных над полем нулевой характеристики является диким. В 2004 году У. Умирбаев также доказал, что автоморфизм Аника свободной ассоциативной алгебры от трех переменных над полем нулевой характеристики является диким.

В 1964 году П. Кон доказал, что все автоморфизмы свободных алгебр Ли конечного ранга являются ручными. В 1968 году Дж. Левин обобщил этот результат для шрайеровых многообразий алгебр. Напомним, что шрайеровыми являются многообразия всех неассоциативных алгебр, коммутативных и антисимметрических алгебр, алгебр Ли и супералгебр Ли. Следовательно, автоморфизмы свободных неассоциативных алгебр, свободных коммутативных и антисимметрических алгебр конечного ранга над полями также являются ручными.

В 1979 году Т. Камбаяши сформулировал гипотезу линеаризации автоморфизмов редуктивных групп (в частности, конечных групп). Используя выше описанную структуру амальгамиированного свободного произведения группы автоморфизмов алгебры многочленов от двух переменных, он доказал, что любая алгебраическая подгруппа группы автоморфизмов $\text{Aut}(K[x,y])$ сопряжена с подгруппой линейных или треугольных автоморфизмов и доказал гипотезу линеаризации в двумерном случае. Оказалось, что гипотеза линеаризации не верна для размерностей $n \geq 4$. В 1989 году Шварц построил первые контрпримеры нелинеаризуемых действий редуктивных групп. Позже были построены примеры нелинеаризуемых действий конечных групп.

Исследование автоморфизмов свободных алгебр тесно связано с изучением локально конечных дифференцирований этих алгебр. Экспонента локально нильпотентного дифференцирования является автоморфизмом. В 1968 году Р. Ренчлер доказал, что локально-нильпотентные дифференцирования алгебры многочленов от двух переменных над полем нулевой характеристики являются триангулируемыми. Х. Басс построил пример не триангулируемого дифференцирования алгебры многочленов от трех переменных.

Диссертационная работа посвящена исследованию автоморфизмов и дифференцирований некоторого класса свободных неассоциативных алгебр ранга два и свободных алгебр Ли ранга три над евклидовыми кольцами. Она выполнена по программе фундаментальных исследований Министерства образования и науки Республики Казахстан по теме "Комбинаторная теория и автоморфизмы дифференциальных алгебр".

Тема диссертации отвечает общенаучным и общегосударственным запросам развития науки и техники и является актуальной.

В рамках требований к PhD диссертациям можно выделить следующие научные результаты диссертационной работы:

- построен пример дикого автоморфизма свободной неассоциативной алгебры и свободной коммутативной алгебры ранга два над произвольным евклидовым кольцом;
- определен широкий класс $*$ -многообразий алгебр и доказано, что группа ручных автоморфизмов свободных двупорожденных алгебр любого $*$ -многообразия алгебр над произвольной областью целостности допускает структуру амальгамиированного свободного произведения;

– доказана сократимость ручных автоморфизмов свободных алгебр от

двух переменных \ast -многообразий алгебр над произвольным евклидовым кольцом;

– доказана алгоритмическая распознаваемость ручных автоморфизмов двупорожденной свободной алгебры \ast -многообразий алгебр над конструктивным евклидовым кольцом;

– построен пример дикого автоморфизма свободной алгебры ранга два любого \ast -многообразия алгебр над произвольным евклидовым кольцом;

– определен класс \ast -многообразий алгебр, который является подклассом класса \ast -многообразий алгебр, и доказано, что многообразие правосимметричных алгебр также является \ast -многообразием;

– доказана линеаризуемость редуктивной группы автоморфизмов свободной алгебры от двух переменных любого \ast -многообразия алгебр над произвольным полем нулевой характеристики;

– доказана триангулируемость локально-нильпотентных дифференцирований свободных алгебр ранга два любого \ast -многообразия алгебр над полем нулевой характеристики;

– доказана линеаризуемость редуктивной группы автоморфизмов и триангулируемость локально-нильпотентных дифференцирований свободной ассоциативной, свободной правосимметричной, свободной неассоциативной и свободной коммутативной алгебр ранга два над полем нулевой характеристики;

– доказано, что группа ручных автоморфизмов свободной алгебры Ли (и свободной антисимметричной алгебры) от трех переменных над произвольной областью целостности допускает структуру амальгамированного свободного произведения;

– доказано, что группа автоморфизмов свободной алгебры Ли от трех переменных над произвольным полем представляется в виде амальгамированного свободного произведения;

– доказана сократимость ручных автоморфизмов свободной алгебры Ли от трех переменных над произвольным евклидовым кольцом;

– доказана алгоритмическая распознаваемость ручных автоморфизмов свободных алгебр Ли от трех переменных над конструктивным евклидовым кольцом;

– построен пример дикого автоморфизма свободной алгебры Ли (и свободной антисимметричной алгебры) ранга 3 над евклидовым кольцом.

Каждый из отмеченных результатов снабжен полными и подробными доказательствами. В доказательствах диссертант умело распространяет результат о представлении группы автоморфизмов алгебры многочленов от двух переменных в виде амальгамированного свободного произведения для широких классов двупорожденных свободных алгебр и трехпорожденных антисимметричных свободных алгебр, и умело их применяет для получения основных результатов диссертационной работы. Одним из методов, использованных в работе, является метод сокращения – удобный и весьма продуктивный метод исследования автоморфизмов. Именно этот метод был

применен для решения известной проблемы Нагаты об автоморфизмах алгебры многочленов от трех переменных. Диссертант преодолевает трудные вычисления и применяет очень сложные комбинаторные рассуждения при доказательствах теорем.

Все результаты диссертации являются новыми. В ходе доказательств диссертант открывает новые комбинаторные методы работы со свободными неассоциативными алгебрами, которые позволяют ему получить глубокие результаты о структуре группы автоморфизмов и локально нильпотентных дифференцирований этих алгебр.

Полученные результаты полностью соответствуют названию диссертации. Постановки задач, формулировки результатов, методы их решения, заключения характеризуются конкретностью и внутренним единством.

Полученные результаты могут быть применены для дальнейшего исследования автоморфизмов и дифференцирований свободных ассоциативных алгебр, свободных алгебр Ли, правосимметричных алгебр и других неассоциативных алгебр, а также могут быть использованы в качестве специальных курсов в учебном процессе по подготовке кадров по специальности математика.

Основные положения, результаты, выводы и заключения диссертации опубликованы в 7 работах: 1 статья в журнале входящий в третий quartile в базе Web of Science, 2 статьи в журналах входящие в базу Scopus, 1 статья в журнале рекомендованным Комитетом по контролю в сфере образования и науки МОН РК, 3 тезиса в материалах международных конференций.

По своей научной значимости и новизне полученных результатов диссертационная работа Алимбаева Алибека Алпысбаевича на тему "Автоморфизмы свободных неассоциативных алгебр над евклидовыми кольцами" отвечает всем требованиям, предъявляемым к докторским диссертациям PhD и ее автор заслуживает ученую степень доктора философии (PhD) по специальности «6D060100–Математика».

Отечественный научный консультант,
д.ф.-м.н., профессор

У.У. Умирбаев

